Concatenazioni in 3-varietà topologiche tramite trecce: invarianti, algoritmi ed equivalenza di rappresentazioni - *Progetto di ricerca*

Stato dell'arte

L'uso di trecce nello studio di concatenazioni in S^3 risale all'inizio del ventesimo secolo. Ci sono essenzialmente due modi per rappresentare concatenazioni mediante trecce: (1) la chiusura ordinaria [13] (che ha sullo sfondo l'idea di decomposizione open-book) e (2) la chiusura a piatti [4] (che si inserisce naturalmente nel contesto della teoria di Morse). Da allora, tali rappresentazioni sono state utilizzare per individuare e classificare alcune importanti famiglie di concatenazioni, come, per esempio, quelle a due ponti. Inoltre, molti invarianti fondamentali di teoria dei nodi, come, per esempio il polinomio di HOMFLY-PT [3], sono stati definiti o ri-definiti in termini di rappresentazioni di gruppi treccia. Sulla scia di tale approccio, è stato sviluppato, più recentemente, un punto di vista categorico su tali invarianti che ha portato alla costruzione di versioni "colorate" [11]. La relazione tra trecce e concatenazioni ha anche fatto emergere molti collegamenti tra la teoria dei nodi e altre branche della matematica e della fisica.

Negli ultimi 30 anni questo legame fruttuoso ha avuto un ruolo fondamentale anche nello studio delle concatenazioni in 3-varietà chiuse e orientabili diverse da S^3. Sia la chiusura ordinaria che quella a piatti sono state generalizzate: rappresentazioni differenti della 3-varietà hanno determinato rappresentazioni differenti delle concatenazioni in essa contenuti. Nel caso della chiusura ordinaria, la 3-varietà è rappresentata mediante chirurgia di Dehn e le concatenazioni mediante elementi del gruppo treccia misto [10], mentre, nel caso a piatti, la 3-varietà è rappresentata tramite spezzamenti di Heegaard e le concatenazioni mediante elementi del gruppo treccia di una superficie [6]. In entrambi i casi l'isotopia ambientale di concatenazioni è stata tradotta in mosse (non locali) d'equivalenza descritte in termini di elementi dei gruppi treccia misti o dei gruppi treccia delle superfici. Sono stati anche ottenuti alcuni risultati preliminari inerenti la possibilità di estendere, da S^3 ad una 3-varietà qualsiasi, la definizione o la tecnica di calcolo di invarianti di concatenazioni [9].

Obiettivi e metodologia

O1) In [6] le mosse di equivalenza per la rappresentazione a piatti sono state calcolate esplicitamente in termini di parole dei gruppi treccia delle superfici nel caso degli spazi lenticolari e di $S^2 \times S^1$ (cioè delle varietà con genere di Heegaard uno). Vogliamo estendere tale calcolo ad altre famiglie (infinite) di varietà con genere almeno due. Una strada è quella di prendere in considerazione varietà i cui spezzamenti di Heegaard siano stati già studiati come le varietà di Seifert piccole [5] oppure le varietà graph con basi orientabili [2]. Inoltre vogliamo trovare un algoritmo che prenda in input una descrizione combinatorica del diagramma di Heegaard della 3-varietà e restituisca le mosse di equivalenza. Un possibile approccio passa attraverso lo studio di diagrammi di Heegaard la cui combinatoria sia controllata da alcuni parametri, come quelli che provengono dalle cristallizzazioni [1]. La possibilità di costruire tanti esempi è importante per lavorare sugli obiettivi successivi.

O2) Le mosse di equivalenza, nel caso di rappresentazione a piatti, dipendono dalle curve meridiane dello spezzamento di Heegaard della 3-varietà. Dato che ci sono esempi di 3-varietà che ammettono superfici di Heegaard non isotope con lo stesso genere, vogliamo confrontare gli inisemi di mosse corrispondenti per capire se ci sono relazioni algebriche tra essi (come elementi dei gruppi treccia della superficie). Inoltre, vogliamo studiare come e se eventuali simmetrie dello spezzamento di Heegaard (ad esempio quelle analizzate in [14]) si riflettano in simmetrie delle parole corrispondenti. Avere un buon controllo su come le mosse algebriche si collegano alla situazione topologica è utile per O3.

O3) Vogliamo analizzare il legame tra la chiusura a piatti e la chiusura ordinaria. Un buon punto di partenza può essere il confronto tra gli esempi prodotti in O1 e quelli descritti in [8].

O4) Vogliamo usare la rappresentazione di concatenazioni in 3-varietà mediante elementi dei gruppi treccia delle superfici per definire, ri-definire e calcolare invarianti di concatenazioni.

In particolare, proveremo a generalizzare alle 3-varietà la definizione omologica del polinomio di HOMFLY-PT descritta in [3]. Inoltre vogliamo capire se questa rappresentazione delle concatenazioni può rendere il calcolo della omologia Knot Floer più semplice [12]. Questo è un invariante molto potente, ma molto complesso da calcolare. Alla luce del fatto che sia la sua definizione iniziale sia la sua riformulazione combinatorica mediante diagrammi grid fa uso di diagrammi di Heegaard, è abbastanza naturale pensare che la rappresentazione di concatenazioni mediante chiusura a piatti semplifichi il calcolo.

O5) Un ultimo obiettivo, che rispetto ai precedenti è meno centrale all'interno progetto, è quello di esplorare le proprietà algebriche del sottogruppo del gruppo treccia di una superficie generato dalle mosse di equivalenza per chiusura a piatti in una varietà fissata. Questo sottogruppo, al di là del suo ruolo nel contesto topologico, è interessante a livello algebrico, dato che dovrebbe essere, come nel caso classico, legato a molti gruppi (gruppi di Hilden, gruppi loops, gruppi wicket, gruppi di trecce virtuali....) che sono stati studiati recentemente da vari autori (si veda il survey [7]).

References

[1] P. Bandieri, M.R. Casali, P. Cristofori, L. Grasselli e M. Mulazzani *Computational aspects of crystallization theory: complexity, catalogues e classifications of 3-manifolds*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia **58** (2011), 11–45.

[2] E. Artal Bartolo, S.Isaza Peñaloza e M.Á. Marco-Buzunáriz *Heegaard splittings of graph manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **198** (2019), 727-747.

[3] S. Bigelow, *A homological definition of the HOMFLY polynomial*,Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 1409-1440.

[4] J. Birman, *On the stable equivalence of plat representation of knots and links*, Canad. J. Math. **28** (1976), 264–290.

[5] M. Boileau, D.J. Collins, H. Zieschang, *Genus 2 Heegaard decompositions of small Seifert manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **41** (1991), 1005-1024.

[6] A. Cattabriga e B. Gabrovsec, *A Markov theorem for generalized plat decompositions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **20** (2020), 1–29.

[7] C. Damiani, *A journey through Loop Braid Groups*, Expo. Math. **35** (2017), 252–285.

[8] I. Diamantis e S. Lambropoulou, *Braid equivalence in 3-manifolds with rational surgery description*, Topol. Appl. **194** (2015), 269–295.

[9] I. Diamantis, S. Lambropoulou e J. Przytycki, *Topological steps toward the Homflypt skein module of the lens spaces $L(p, 1)$ via braids*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), 1650084

[10] S. Lambropoulou e C. P. Rourke, *Algebraic Markov equivalence for links in 3-manifolds*, Compositio Math. **142** (2006), 1039–1062.

[11] X.-S. Lin e H. Zheng, *On the Hecke algebras and the colored Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 1–18.

[12] C. Manolescu, P. Ozsváth, S. Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. **169** (2009), 633–660.

[13] A. A. Markov, *Über die freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe*, Recusil Mathématique Moscou **1** (1935), 73–78.

[14] J. Schultens, *Flipping Heegaard splittings of Seifert fibered spaces*, preprint (2022), arXiv:2208.10565.

Concatenazioni in 3-varietà topologiche tramite trecce: invarianti, algoritmi ed equivalenza di rappresentazioni - *Piano delle attività*

Il candidato vincitore lavorerà insieme al gruppo di topologia del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna al fine di raggiungere gli obiettivi descritti nel progetto di ricerca. Inoltre per O1, collaborerà anche con i membri del gruppo di topologia del Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Più nel dettaglio:

- incontrerà (almeno una volta alla settimana) il tutor per discutere dello stato dell'arte;
- terrà (almano due) seminari aperti per descrivere i risultati ottenuti o più in generale i progressi nell'ambito del progetto di ricerca;
- proporrà al collegio di dottorato un corso o un ciclo di seminari per studenti di dottorato sull'argomento *trecce, concatenazioni e mapping class groups*;
- parteciperà attivamente alle attività di ricerca del dipartimento.

Links in topological 3-manifolds through braids: invariants, algorithms, and equivalence of representations - *Research Project*

State of the art

The use of braids to represent and study links in S^3 dates back to the beginning of the twentieth century. There are essentially two ways to use braids to represent links: (1) the ordinary closure [13] (that has in its background the idea of open book decomposition) and (2) the plat closure [4] (that could be naturally inserted into the Morse theory context). Since then, such representations have been used to detect and classify important families of links as 2-bridge links. Moreover, many fundamental invariants of knot theory, as, for example, the HOMFLY-PT polynomial [3], have been defined or re-defined in terms of braid representations. Along with this approach, more recently, a categorical point of view on these invariants emerged leading to "colored" versions [11]. The interplay between braids and links revealed also many connections of knot theory with different areas of mathematics and physics.

In the last 30 years, this fruitful relationship had a fundamental role also in studying links in closed orientable 3-manifolds different from S^3. Both ordinary and plat closure have been generalized: different representation for the 3-manifolds led to different representations of the links inside them. In the case of the ordinary closure, the 3-manifold is represented via Dehn surgery and the links are represented through the mixed braid group [10], while, in the plat case, the 3-manifold is represented via Heegaard splitting and the links are represented through surface braid groups [6]. In both cases the ambient isotopy of links is translated into (non-local) equivalence moves described in terms of elements of the mixed braid groups or of the surface braid groups. Some preliminary results on extending or computing links invariants via these representations have been obtained [9].

Goals and methodology

G1) In [6] the equivalence moves under plat closure were explicitly computed in terms of words of the surface braid groups for the case of lens spaces and $S^2 \times S^1$ (that is, Heegaard genus one 3-manifolds). We want to extend these computations to some (infinite) families of manifolds of genus at least two. A possibility is to consider manifolds whose Heegaard splitting have already been studied such as small Seifert manifolds [5] or graph manifolds with orientable bases [2]. Moreover we want to find an algorithm that takes as input a combinatorial description of the Heegaard diagram of the 3-manifold and computes the equivalence moves. A possible approach is to start with Heegaard diagrams whose combinatorics is controlled by parameters as those arising from crystallizations [1]. Having the possibility of producing many different examples is important to exploit next goals.

G2) The moves in the plat case depend on the (meridian curves of the) Heegaard splitting of the 3-manifold. Since there are examples of 3-manifolds admitting non isotopic Heegaard surfaces with the same genus [5], we want to compare the corresponding set of moves in order to understand which algebraic relation (if any) there is between them (as elements of the surface braid group). Moreover, we want to understand how symmetries of the Heegaard splitting (for example those studied in [14]) reflect on symmetries of the corresponding words. Having a better understanding on how the algebraic moves relate to the topological setting could be useful for G3.

G3) We want to explore the relationships between the plat and the ordinary closure. A starting point could be comparing the example produced in G1 with those presented in [8].

G4) We want to use the representation of links in 3-manifolds via surface braid group to define, re-define or compute link invariants. Particularly, we will try extend to the 3-manifold case the homological definition of the HOMFLY-PT polynomial developed in [3]. Furthermore, we want to understand if plat representation can make it easier to compute the Knot Floer homology of a link [12]. This is a very powerful invariant which is very hard to compute. Since both its original definition as well as its combinatorial reformulation via grid diagram uses Heegaard splitting, it is quite natural to think that representing links via plat closure could simplify the computation.

G5) A last goal, that with respect to the previous ones is less central to the whole project, is to explore the algebraic properties of the subgroup of the surface braid group generated by the equivalence moves under plat closure in a fixed 3-manifold. This subgroup, beside its topological meaning, has algebraic interest by itself, since, as in the classical case, it should be connected with a lot of groups (Hilden groups, loop groups, wicket groups, virtual braid groups,..) that have been recently studied by many authors (see for example the survey [7]).

References

[1] P. Bandieri, M.R. Casali, P. Cristofori, L. Grasselli and M. Mulazzani *Computational aspects of crystallization theory: complexity, catalogues and classifications of 3-manifolds*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia **58** (2011), 11–45.

[2] E. Artal Bartolo, S.Isaza Peñaloza and M.Á. Marco-Buzunáriz *Heegaard splittings of graph manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **198** (2019), 727-747.

[3] S. Bigelow, *A homological definition of the HOMFLY polynomial*,Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 1409-1440.

[4] J. Birman, *On the stable equivalence of plat representation of knots and links*, Canad. J. Math. **28** (1976), 264–290.

[5] M. Boileau, D.J. Collins and H. Zieschang, *Genus 2 Heegaard decompositions of small Seifert manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **41** (1991), 1005-1024.

[6] A. Cattabriga and B. Gabrovsec, *A Markov theorem for generalized plat decompositions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **20** (2020), 1–29.

[7] C. Damiani, *A journey through Loop Braid Groups*, Expo. Math. **35** (2017), 252–285.

[8] I. Diamantis and S. Lambropoulou, *Braid equivalence in 3-manifolds with rational surgery description*, Topol. Appl. **194** (2015), 269–295.

[9] I. Diamantis, S. Lambropoulou and J. Przytycki, *Topological steps toward the Homflypt skein module of the lens spaces $L(p, 1)$ via braids*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), 1650084

[10] S. Lambropoulou and C.P. Rourke, *Algebraic Markov equivalence for links in 3-manifolds*, Compositio Math. **142** (2006), 1039–1062.

[11] X.-S. Lin and H. Zheng, *On the Hecke algebras and the colored Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 1–18.

[12] C. Manolescu, P. Ozsváth and S. Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. **169** (2009), 633–660.

[13] A.A. Markov, *Über die freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe*, Recusil Mathématique Moscou **1** (1935), 73–78.

[14] J. Schultens, *Flipping Heegaard splittings of Seifert fibered spaces*, preprint (2022), arXiv:2208.10565.

Links in topological 3-manifolds through braids: invariants, algorithms, and equivalence of representations - *Plan of the activities*

The successful candidate will work together with the topological group of the Mathematical Department of the University of Bologna in order to reach the goals described in the research project. Moreover, for G1, he will collaborate also with members of the topological group of the Department of Physics, Computer Science and Mathematics and the University of Modena and Reggio Emilia.

More precisely:

- he will meet (at least once a week) with his tutor to discuss the state of the art;
- he will give (at least a couple) of open seminars to describe his results and more generally the progress made in the research project;
- he will propose to the PhD council a course or a cycle of seminars on the theme *braid, links and mapping class group* for PhD students;
- he will actively participate to the research activities of the department.